الموضوع : .... التاريخ : 23 / 4 / 2018

المحاضرة السابعة :

لا يفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي وسيطه المجهول θ ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n عندئذ لإيجاد مجال الثقة للوسيط θ على أساس العينة المأخوذة سوف نتبع ما يلي :

1- سوف نبحث عن كمية محورية (الكمية المحورية هي كمية تحوي الوسيط وتوزيعها الاحتمالي معلوم والكميات الاضافية إليها معلومة)

2- نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره $1-\alpha$ والذي ندعوه بمعامل الثقة، حيث α تؤخذ صغيرة وتدعى بمستوى الأهمية مثل $\alpha=0,01$

$\alpha=0,025$, ——— , $\alpha=0,10$

3- وإذا أعطيت α فيمكن أن نعلم $1-\alpha$ والعكس صحيح ~~أيضاً~~ ومن ثم نجري عملية العزل للوسيط θ لنحصل على إحصائيتين L_1, L_2 بحيث $L_2 > L_1$ ويكون : $P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1-\alpha$

عندئذ ندعو المجال $[L_1, L_2]$ بمجال الثقة المطلوب حيث ~~مستوى~~ الكمية α معلوم

تمرين نظري

مثال : نفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً طبيعياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ بحيث σ^2 معلوم ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n معلومة حيث $\bar{X}$ الوسط الحسابي الموافق لهذه العينة عندئذ لنوجد مجال الثقة للوسيط μ بمستوى أهمية α معلوم

الحل : أولاً سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي :

Royal Company

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

ومنه تم حصر هذه الكمية بين كميتين ~~محوريتين~~ معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره $1-\alpha$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = F(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - F(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

$$= 2F(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1$$

ولكن بناءً على التوزيع الطبيعي المعياري يتحقق:

$$P(Z < Z_{\alpha}) = \alpha$$

وبالتالي:

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2P(Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1$$

$$= 2(1-\frac{\alpha}{2}) - 1 = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{X}-\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(\underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_1} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_2}) = 1-\alpha$$

نستنتج مجال الثقة المطلوب:

$$[L_1, L_2] = [\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$$

الموضوع: ....
التاريخ: ...... / / ٢٠

ويمكن أن ندعو هذا المجال بمجال عشوائي لأنه كل ما اختلف حجم العينة نحصل على مجال ثقة جديد وسوف ندعو بالخطأ المطلق الأعظمي لتقدير μ والذي نرمز له بالرمز:

$$e = \left| \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right|$$

بعد ذلك يمكن أن يطلب منا ما هو حجم العينة اللازم لتقدير μ بحيث يكون الخطأ المطلق الأعظمي أصغر أو يساوي ε صغير موجب معلوم أي أن: $e \leq \varepsilon \Rightarrow e^2 \leq \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} Z^2_{1-\alpha} \leq \varepsilon^2 \Rightarrow$$ نضرب بـ n ونقسم على ε^2

$$\Rightarrow n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow n \geq \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

إذا كان المجتمع المعطى غير طبيعي وحجم العينة أكبر من 30 فيمكن أن نقربه من المجتمع الطبيعي.

مثال: نفرض لدينا مجتمع إحصائي طبيعي $X \sim N(\mu, 16)$ ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها $n = 25$ بحيث: $\bar{X} = 12$ عندئذٍ لنوجد مجال الثقة للوسيط μ عند مستوى الثقة: $\alpha = 0,05$.

ثم عيّن الخطأ المطلق الأعظمي في تقدير μ وبعدها عيّن حجم العينة اللازم من أجل أن يكون الخطأ المطلق الأعظمي أصغر أو يساوي $\varepsilon = 0,04$.

الحل: من أجل إيجاد مجال الثقة للوسيط μ سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ومن ثم نحصر هذه الكمية بين عددين معلومين من توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره $0,95$ أي أن:

الموضوع: .... التاريخ: / / ٢٠

$$Z_{0,975} = 1,96$$

ومن ثم نجري عملية العزل للوسيط μ لنجد أن:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha = 0,95$$

أي أن مجال الثقة هو

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} , \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] =$$

$$\alpha = 0,05 , \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$$

$$1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$

$$= \left[12 - \frac{4}{5}(1,96) , 12 + \frac{4}{5}(1,96)\right] = [\ ,\ ]$$

الخطأ المطلق الأعظمي:

$$e = \left|\mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right| = \left|\mp \frac{4}{5}(1,96)\right|$$ ← هنا بأخذ العلاقة كاملة

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow n \geq \frac{16}{(0,04)^2}(1,96)^2$$

2 - إيجاد مجال الثقة للوسيط μ في مجتمع إحصائي طبيعي فيه σ^2 مجهول:

نفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً طبيعياً σ مجهول $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n بحيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي الموافق لهذه العينة و S^2 هو التباين لهذه العينة و S هو الانحراف المعياري لهذه العينة ولنوجد مجال الثقة للوسيط μ لنا مستوى

أ) حالة σ مجهول، أولاً نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

كون σ مجهولة ومن ثم نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره $1-\alpha$ أي:

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le T\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

نبدل كل T بما يساويها:

$$\Rightarrow P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

أيضاً نجري عملية العزل للوسيط μ

$$\Rightarrow P\left(-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le \bar{X}-\mu\le \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\Big(\underbrace{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}_{L_1}\le\mu\le \underbrace{\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}_{L_2}\Big)=1-\alpha$$

وبالتالي مجال الثقة في هذه الحالة هو:

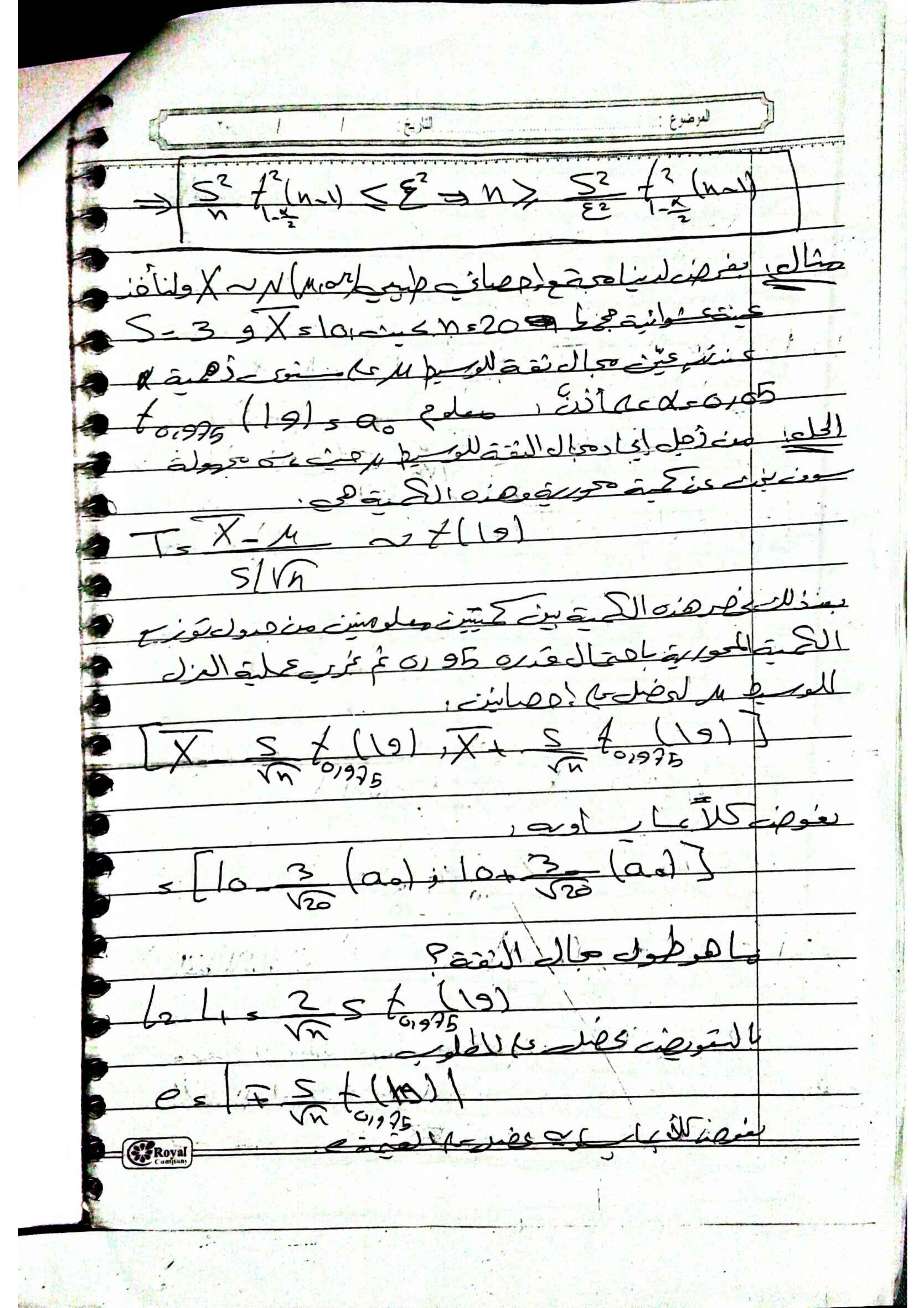
$$\left[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ ,\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

طول المجال $L_2-L_1=2\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

الخطأ المطلق الأعظمي $e=\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

ويمكن أن يطلب منا ما هو حجم العينة اللازم من أجل أن يكون الخطأ المطلق الأعظمي أصغر أو يساوي ε من أجل أن يكون ε عدد صغير موجب

$$e\le\varepsilon\Rightarrow e^2\le\varepsilon^2$$



$$\Rightarrow \frac{S^2}{n} t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \varepsilon^2 \Rightarrow n \ge \frac{S^2}{\varepsilon^2} t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

مثال: بفرض لدينا مجتمع إحصائي طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولنأخذ عينة عشوائية حجمها $n = 20$ حيث $\bar{X} = 10$ و $S = 3$

عين مجال ثقة للوسيط μ عند مستوى أهمية α حيث $\alpha = 0.05$ ، علماً أن $t_{0.975}(19) = a_0$

الحل: من أجل إيجاد مجال الثقة للوسيط μ حيث σ^2 مجهولة سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(19)$$

بعد ذلك نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره 0.95 ثم نجري عملية العزل للوسيط μ لنحصل على إحصائين:

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19) , \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19)\right]$$

نعوض كلاً بما يساويه:

$$= \left[10 - \frac{3}{\sqrt{20}}(a_0) , 10 + \frac{3}{\sqrt{20}}(a_0)\right]$$

ما هو طول مجال الثقة؟

$$L_2 - L_1 = \frac{2}{\sqrt{n}} S\, t_{0.975}(19)$$

بالتعويض نحصل على المطلوب.

$$e = \left| \mp \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(19) \right|$$

نعوض كلاً بما يساويه نحصل على القيمة.

الموضوع: .... التاريخ: / /

مسائل مثالية

حجم العينة ضمن ذلك إن يكون مجال الثقة (1-α) $n \geq \frac{S^2}{\varepsilon^2} t^2_{0.975}$

3) إيجاد مجال الثقة للفرق بين متوسطين مجتمعين إحصائيين طبيعيين في كل منهما التباين معلوم:

نفرض لدينا مجتمعين إحصائيين طبيعيين كل منهما المجال:

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$; σ_1^2 معلومة

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$; σ_2^2 معلومة

ولنوجد مجال الثقة $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى أهمية α معلومة

لإيجاد مجال الثقة المطلوب سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

n حجم المأخوذ من العينة الأولى و m الحجم المأخوذ من العينة الثانية

سوف نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين باحتمال قدره 1-α

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\quad} \leq \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\quad}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\quad} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\quad}\right) = 1-\alpha$$

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \; , \; (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$